

Hipotezy ortogonalne

Rozważamy model liniowy:

$$X = \varphi + \varepsilon$$

gdzie $X \in R^n$ jest wektorem obserwacji
 $\varphi \in \Omega \subset R^n$ jest wektorem średnich (wartości oczekiwanych), o którym wiadomo, leży w pewnej właściwej podprzestrzeni liniowej Ω przestrzeni R^n , tzn. $\Omega \subset R^n$ i $\dim(\Omega) < n$
 $\varepsilon \in R^n$ jest losowym wektorem błędów o rozkładzie $\varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$

Rozważmy **dwie hipotezy liniowe** specyfikujące 2 podprzestrzenie liniowe $\omega_1 \subset \Omega$ i $\omega_2 \subset \Omega$ przestrzeni Ω . **Hipotezę liniową będziemy utożsamiać z podprzestrzenią, którą ona specyfikuje.**

Oczywiście $\omega_1 \cap \omega_2 \subset \Omega$ jest podprzestrzenią liniową

Potrąfimy już testować hipotezę

$$H_0: \varphi \in \omega_1 \cap \omega_2 \subset \Omega$$

przeciwko $H_1: \varphi \in \Omega - \omega_1 \cap \omega_2$,

ale jeśli test odrzuci hipotezę $H_0: \varphi \in \omega_1 \cap \omega_2 \subset \Omega$, to chcielibyśmy wiedzieć czy fałszywą jest hipoteza ω_1 czy ω_2 czy obie jednocześnie. Nie zawsze jest to możliwe

Przykład. Model regresji liniowej

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 a_i + \beta_2 b_i + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n$$

ε_i i.i.d. $N(0, \sigma^2)$, który można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Jeżeli chcemy zbadać czy zmienna a wpływa na wynik (odpowiedź) y , to testujemy hipotezę

$$\beta_1 = 0 \text{ (zmienna } a \text{ nie ma wpływu na } y \text{) która specyfikuje } \omega_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right\}.$$

Jeżeli chcemy zbadać czy zmienna b wpływa na wynik (odpowiedź) y , to testujemy hipotezę

$$\beta_2 = 0 \text{ (zmienna } a \text{ nie ma wpływu na } y \text{) która specyfikuje } \omega_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\}$$

Jeżeli testujemy hipotezę o braku wpływu zmiennych a i b na odpowiedź y , to testujemy hipotezę

Hipotezy ortogonalne

$$\beta_1=0 \text{ i } \beta_2=0 \quad \text{która specyfikuje } \omega_1 \cap \omega_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Może się jednak okazać, że nie potrafimy oddzielić od siebie wpływów zmiennych (tu nielosowych) a

$$\text{i b. Jeżeli wektory } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ są liniowo zależne (np. } \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{, to parametry } \beta_1 \text{ i } \beta_2 \text{ są}$$

$$\text{nieidentyfikowalne a suma } \beta_1 + k\beta_2 \text{ może być identyfikowalna, gdy } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \neq \text{const} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{. Wówczas}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + (\beta_1 + k\beta_2) \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

W mniej skrajnych przypadkach kolumny macierzy planu mogą być „prawie liniowo zależne” co skutkuje tw. złym uwarunkowaniem i testy hipotezy $\beta_1=0$ i hipotezy $\beta_2=0$ mogą być słabe a test hipotezy $\beta_1+k\beta_2=0$ może być całkiem mocny.

Estymowalność i testowalność

Rozważmy model $Y=X\beta+\varepsilon$, $\varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I)$

Def. Liniowa funkcja parametryczna $c^T \beta$ jest (nieobciążenie) estymowalna, gdy istnieje liniowy nieobciążony estymator $b^T Y$ tej funkcji.

$$\textbf{WKW estymowalności} \quad E(b^T Y) = b^T E(Y) = b^T X\beta = c^T \beta \quad \forall \beta \Leftrightarrow X^T b = c \Leftrightarrow c \in \text{Im}(X^T) \\ (\text{wiersz } c^T \text{ jest liniową kombinacją wierszy macierzy } A)$$

Def. Hipoteza liniowa $H\beta=0$ jest testowalna, jeżeli estymowalne są wszystkie liniowe funkcje parametryczne generowane przez wiersze macierzy H

$$\textbf{WKW testowalności} : \text{Im}(H^T) \subset \text{Im}(X^T) \\ (\text{wiersze macierzy } H \text{ są liniowymi kombinacjami wierszy macierzy } X)$$

Hipotezy ortogonalne

Wracamy do modelu

$$Y = \Phi^T \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}), \quad \Phi \in \Omega \subset R^n, \quad \dim(\Omega) < n$$

Rozważmy hipotezy $H_0^1: \Phi \in \omega_1 \subset \Omega$ i $H_0^2: \Phi \in \omega_2 \subset \Omega$

Oczywiście $\Omega = \omega_1 \oplus \omega_1^\perp$ i $\Omega = \omega_2 \oplus \omega_2^\perp$ (sumy proste)

Def. Hipotezy ω_1 i ω_2 nazywamy hipotezami ortogonalnymi gdy przestrzenie $\omega_1^\perp$ i $\omega_2^\perp$ są ortogonalne

Z warunku ortogonalności hipotez ω_1 i ω_2 czyli z warunku $\omega_1^\perp \perp \omega_2^\perp$ wynika

$$\omega_1^\perp \subset \omega_2 \quad (\text{bo } \Omega = \omega_2 \oplus \omega_2^\perp)$$

$$\omega_2^\perp \subset \omega_1 \quad (\text{bo } \Omega = \omega_1 \oplus \omega_1^\perp)$$

zatem $\dim(\omega_1 + \omega_2) \geq \dim(\omega_1 + \omega_1^\perp) = \dim(\Omega)$ (sumy algebraiczne)

Ale $(\omega_1 + \omega_2) \subset \Omega$ stąd $\dim(\omega_1 + \omega_2) \leq \dim(\Omega)$.

Wobec tego dzięki ortogonalności hipotez ω_1 i ω_2 (czyli $\omega_1^\perp \perp \omega_2^\perp$) mamy $\dim(\omega_1 + \omega_2) = \dim(\Omega)$.

Oznaczmy odpowiednio

$$q = \dim(\omega_1 \cap \omega_2)$$

$$r_1 = \dim(\omega_1) \quad (\text{tzn macierz } H^1 \text{ jest typu } (s - r_1, s) \text{ pełnego rzędu –specyfikuje } s - r_1 \text{ ograniczeń})$$

$$r_2 = \dim(\omega_2) \quad (\text{tzn macierz } H^2 \text{ jest typu } (s - r_2, s) \text{ pełnego rzędu –specyfikuje } s - r_2 \text{ ograniczeń})$$

$$s = \dim(\Omega)$$

Warunek ortogonalności badanych hipotez pozwala napisać fundamentalny związek pomiędzy wymiarami odpowiednich przestrzeni

$$s = r_1 + r_2 - q$$

Postać kanoniczna

Wprowadźmy w R^n nową bazę ortonormalną $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ tak aby

$\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_q$	baza w $\omega_1 \cap \omega_2$
$\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_q, \tilde{\mathbf{e}}_{q+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{r_1}$	baza w ω_1
$\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_q, \tilde{\mathbf{e}}_{r_1+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_s$	baza w ω_2
$\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_q, \tilde{\mathbf{e}}_{q+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{r_1}, \tilde{\mathbf{e}}_{r_1+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_s$	baza w Ω
$\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_q, \tilde{\mathbf{e}}_{q+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{r_1}, \tilde{\mathbf{e}}_{r_1+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_s, \tilde{\mathbf{e}}_{s+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n$	baza w R^n

Niech $\mathbf{P}$ będzie macierzą przejścia od starej bazy kanonicznej do nowej bazy $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_s)$

Oznacza to, że $\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \mathbf{e}_i$. Macierz $\mathbf{P}$ jest oczywiście macierzą ortogonalną. Związek pomiędzy

współzrędnymi $\mathbf{y}$ wektora w starej bazie i jego współzrędnymi $\tilde{\mathbf{y}}$ w nowej bazie jest postaci

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{y}} \text{ lub równoważnie } \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^T \mathbf{y}$$

Ponieważ w bazie kanonicznej możemy utożsamiać wektor z jego zestawem współzrędnymi w bazie kanonicznej kolumny macierzy $\mathbf{P}$ (wiersze $\mathbf{P}^T$) są zestawione z wektorów nowej bazy $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$.

Wektor $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ leżący w przestrzeni $\text{Im}(\mathbf{X})$ rozpinanej także przez $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_s)$ może być zapisany w

$$\text{postaci } \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^s \gamma_i \tilde{\mathbf{e}}_i$$

Mnożąc obustronnie $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ przez $\mathbf{P}^T$ otrzymujemy

$$\mathbf{P}^T \mathbf{Y} = \mathbf{P}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}^T \sum_{i=1}^s \gamma_i \tilde{\mathbf{e}}_i + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon}$$

Oznaczając $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^T \mathbf{Y}$ i $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ otrzymujemy równoważny model w postaci kanonicznej

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r_1-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r_2-q} \\ & & & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{przy czym} \quad \boldsymbol{\eta} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}_{kan} \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta}$$

Dla modelu w postaci kanonicznej hipoteza H_0 przybiera postać

$$H_0^1: \quad \boldsymbol{\varphi} \in \omega_1 \Leftrightarrow \gamma_{r_1+1} = 0, \dots, \gamma_s = 0$$

$$H_0^2: \quad \boldsymbol{\varphi} \in \omega_2 \Leftrightarrow \gamma_{q+1} = 0, \dots, \gamma_{r_1} = 0$$

$$H_0^{1,2}: \quad \boldsymbol{\varphi} \in \omega_1 \cap \omega_2 \Leftrightarrow \gamma_{q+1} = 0, \dots, \gamma_{r_1} = 0, \gamma_{r_1+1} = 0, \dots, \gamma_s = 0$$

Ponieważ przekształcenie ortogonalne zachowuje normę więc prawdziwe są równości

$$R_0 = \|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{P}_\Omega \tilde{\mathbf{Y}}\|^2 = \sum_{i=s+1}^n \tilde{Y}_i^2 = \tilde{Y}_{s+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_n^2$$

reszkowa suma kwadratów (wewnątrzgrupowa) w modelu bezwarunkowym .

$$R_1 = \|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\|^2 = \|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{P}_{\omega_1} \tilde{\mathbf{Y}}\|^2 = \tilde{Y}_{r_1+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_s^2 + \tilde{Y}_{s+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_n^2$$

reszkowa suma kwadratów w modelu warunkowym przy H_0^1

$$R_2 = \|\hat{\mathbf{e}}_2\|^2 = \|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{P}_{\omega_2} \tilde{\mathbf{Y}}\|^2 = \tilde{Y}_{q+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_{r_1}^2 + \tilde{Y}_{s+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_n^2$$

reszkowa suma kwadratów w modelu warunkowym przy H_0^2

$$R_{12} = \|\hat{\mathbf{e}}_{1,2}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{P}_{\omega_1 \cap \omega_2} \tilde{\mathbf{Y}}\|^2 = \tilde{Y}_{q+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_{r_1}^2 + \tilde{Y}_{r_1+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_s^2 + \tilde{Y}_{s+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_n^2$$

reszkowa suma kwadratów w modelu warunkowym przy $H_0^1 \wedge H_0^2$

Widać, że zmienne

$$R_1 - R_0 = \tilde{Y}_{r_1+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_s^2$$

$$R_2 - R_0 = \tilde{Y}_{q+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_{r_1}^2$$

$$R_0 = Y_{s+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

są niezależne i

$$R_{12} - R_0 = (R_2 - R_0) + (R_1 - R_0) = \tilde{Y}_{q+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_{r_1}^2 + \tilde{Y}_{r_1+1}^2 + \dots + \tilde{Y}_s^2.$$

Ponadto (oznaczając przez $P_{\omega_i} \boldsymbol{\varphi}$ rzut wektora $\boldsymbol{\varphi} = E(\mathbf{X})$ na przestrzeń ω_i)

- $\frac{R_1 - R_0}{\sigma^2}$ ma rozkład χ_{s-r_1, δ_1}^2 przy czym $\delta_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=r_1+1}^s \gamma_i^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\boldsymbol{\varphi} - P_{\omega_1} \boldsymbol{\varphi}\|^2$
- $\frac{R_2 - R_0}{\sigma^2}$ ma rozkład χ_{s-r_2, δ_2}^2 przy czym $\delta_2^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=q+1}^{r_1} \gamma_i^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\boldsymbol{\varphi} - P_{\omega_2} \boldsymbol{\varphi}\|^2$
- $\frac{R_0}{\sigma^2}$ ma rozkład χ_{n-s}^2

Podsumowaniem jest następująca

Tabela ANOVA

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat	Iloraz F
Hipoteza ω_1	$R_1 - R_0$	$s - r_1$	$m_1 = \frac{1}{s - r_1} (R_1 - R_0)$	$F_1 = \frac{m_1}{m_0}$
Hipoteza ω_2	$R_2 - R_0$	$s - r_2$	$m_2 = \frac{1}{s - r_2} (R_2 - R_0)$	$F_2 = \frac{m_2}{m_0}$
Hipoteza $\omega_1 \cap \omega_2$	$R_{12} - R_0$	$s - q$	$m_{12} = \frac{1}{s - q} (R_{12} - R_0)$	$F_{12} = \frac{m_{12}}{m_0}$
Błąd (wewnątrz grup)	R_0	$n - s$	$m_0 = \frac{1}{n - s} R_0$	
Ogółem	$R_{1,2}$	$n - q$		

Warto na etapie planowania eksperymentu zadbać o to by interesujące nas hipotezy były ortogonalne, gdyż ortogonalność umożliwia oprócz testowania łącznej hipotezy liniowej także testowanie hipotez składowych a statystyki testowe dla tych hipotez szczegółowych są niezależne

(Problem na ćwiczenia). Wróćmy jeszcze raz do rozważanego modelu

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Zadanie. Przeprowadzić szczegółowe rozważania (konstrukcję odpowiednich baz) uwzględniające ortogonalność dla testowania hipotez $\beta_1=0$ i $\beta_2=0$.

Oznaczając przez $\mathbf{1}$ $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kolumny macierzy $\mathbf{A}$ planu eksperymentu mamy

$$\Omega = \text{span}\{\mathbf{1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \omega_1 = \text{span}\{\mathbf{1}, \mathbf{b}\}, \omega_2 = \text{span}\{\mathbf{1}, \mathbf{a}\}$$

Oznaczając $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$, $\bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i$, $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a} \mathbf{1}$, $\bar{\mathbf{b}} = \bar{b} \mathbf{1}$ mamy

$$\Omega = \text{span}\{\mathbf{1}, \mathbf{a} - \bar{a} \mathbf{1}, \mathbf{b} - \bar{b} \mathbf{1}\}, \omega_1 = \text{span}\{\mathbf{1}, \mathbf{b} - \bar{b} \mathbf{1}\}, \omega_2 = \text{span}\{\mathbf{1}, \mathbf{a} - \bar{a} \mathbf{1}\}$$

Warunek ortogonalności hipotez ω_1 i ω_2 przyjmuje postać

$$\langle \mathbf{a} - \bar{a} \mathbf{1}, \mathbf{b} - \bar{b} \mathbf{1} \rangle = 0, \text{ czyli } \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = 0. \text{ Załóżmy, że jest on spełniony.}$$

Wyjściowy model $y_i = \beta_0 + \beta_1 a_i + \beta_2 b_i + \varepsilon_i$, $i=1, \dots, n$; ε_i i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ można zapisać w postaci

$$y_i = \delta_0 + \beta_1(a_i - \bar{a}) + \beta_2(b_i - \bar{b}) + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n, \quad \text{gdzie } \delta_0 = \beta_0 + \beta_1 \bar{a} + \beta_2 \bar{b}$$

lub macierzowo
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 - \bar{a} & b_1 - \bar{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - \bar{a} & b_n - \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Z uwagi na warunek ortogonalności mamy

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & \sum_1^n (a_i - \bar{a})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_1^n (b_i - \bar{b})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n (a_i - \bar{a}) y_i \\ \sum_1^n (b_i - \bar{b}) y_i \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} \hat{\delta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_1^n y_i}{n} \\ \frac{\sum_1^n (a_i - \bar{a}) y_i}{\sum_1^n (a_i - \bar{a})^2} \\ \frac{\sum_1^n (b_i - \bar{b}) y_i}{\sum_1^n (b_i - \bar{b})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \frac{\langle \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{Y} \rangle}{\|\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\|^2} \\ \frac{\langle \mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}, \mathbf{Y} \rangle}{\|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \|\mathbf{Y} - \hat{\delta}_0 \mathbf{1} - \hat{\beta}_1(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) - \hat{\beta}_2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})\|^2 = \\ &= \langle \mathbf{Y} - \bar{Y} - \hat{\beta}_1(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) - \hat{\beta}_2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}), \mathbf{Y} - \bar{Y} - \hat{\beta}_1(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) - \hat{\beta}_2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \rangle = \\ &= \|\mathbf{Y} - \bar{Y}\|^2 - \hat{\beta}_1^2 \|\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\|^2 - \hat{\beta}_2^2 \|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|^2 \end{aligned}$$

$$R_1 = \|\mathbf{Y} - \hat{\delta}_0 \mathbf{1} - \hat{\beta}_2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})\|^2 = \|\mathbf{Y} - \bar{Y}\|^2 - \hat{\beta}_2^2 \|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|^2,$$

$$R_2 = \|\mathbf{Y} - \hat{\delta}_0 \mathbf{1} - \hat{\beta}_1(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})\|^2 = \|\mathbf{Y} - \bar{Y}\|^2 - \hat{\beta}_1^2 \|\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\|^2$$

$$R_{12} = \|\mathbf{Y} - \hat{\delta}_0 \mathbf{1}\|^2 = \|\mathbf{Y} - \bar{Y}\|^2$$

Hipotezy ortogonalne

Tabela ANOVA

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody
Hipoteza ω_1 ($\beta_1=0$)	$R_1 - R_0 = \hat{\beta}_1^2 \ \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\ ^2 = \frac{\langle \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\ \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\ ^2}$	1
Hipoteza ω_2 ($\beta_2=0$)	$R_2 - R_0 = \hat{\beta}_2^2 \ \mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\ ^2 = \frac{\langle \mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\ \mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\ ^2}$	1
Hipoteza $\omega_1 \cap \omega_2$	$R_{12} - R_0 = \hat{\beta}_1^2 \ \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\ ^2 + \hat{\beta}_2^2 \ \mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\ ^2$	2
Błąd (wewnątrz grup)	$R_0 = \ \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}\ ^2 - \hat{\beta}_1^2 \ \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\ ^2 - \hat{\beta}_2^2 \ \mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\ ^2$	$n-3$
Ogółem	$R_{1,2} = \ \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}\ ^2$	$n-1$